APPROXIMATION D'UNE LAME D'EAU

1. POSITION DU PROBLEME

1.1. Les données mesurées

Sur les territoires de la COURLY, un groupe de pluviomètres a été installé qui permet de mesurer l'intensité précipitée en leur droit toutes les six minutes. Pour une séquence pluvieuse choisie, on possède donc une matrice M_1 (T, P) où :

T nombre de lignes, représente le nombre de pas de temps considérés

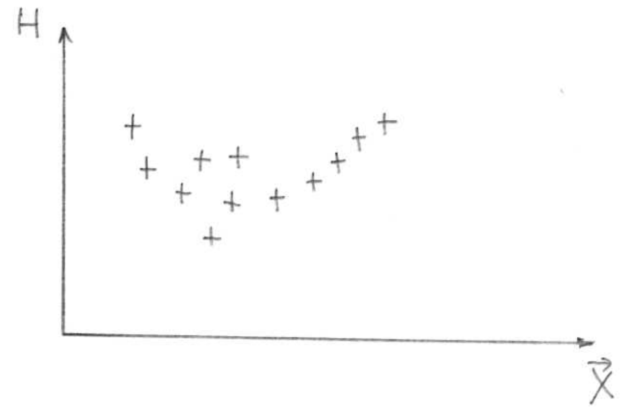
P nombre de colonnes, représente le nombre de pluviomètres où sont mesurées les intensités.

Ainsi,

la *ième* colonne permet de déterminer le hyétogramme au droit du pluviomètre Pi

la *jème* colonne permet d'obtenir au pas de temps Tj les intensités tombées au droit de tous les pluviomètres.

Ces données stockées définissent un nuage de points expérimentaux repérés en abscisse par un vecteur spatio-temporel et en ordonnée par un scalaire l'intensité précipitée.



$M\begin{pmatrix}\vec{X}\\ H\end{pmatrix}$

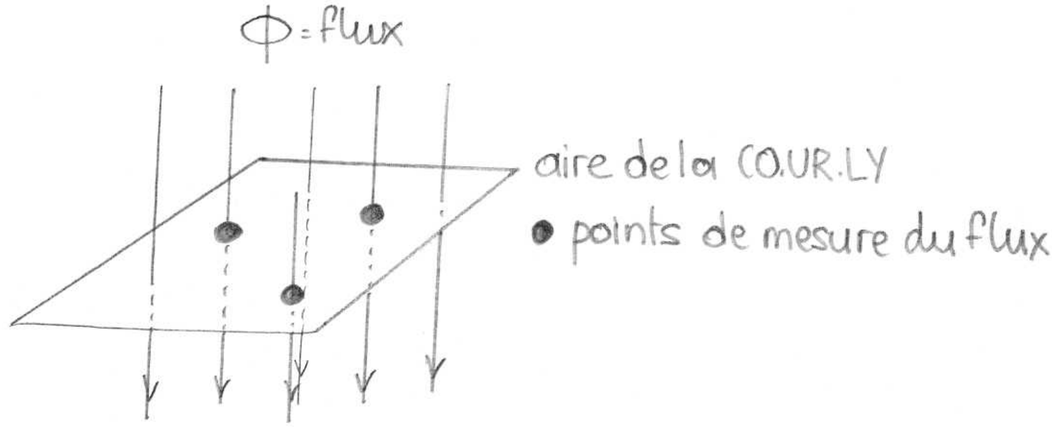
$\vec{X}$ coordonnées du point

H intensité mesurée en ce point

Projection du nuage de points sur un des axes du spatio-temporel

1.2. Objectifs

Le problème consiste, à définir pour la séquence pluvieuse donnée, à chaque pas de temps une surface d'approximation de ce nuage qui permît de faire la transposition entre données ponctuelles et données surfaciques. En effet, c'est le phénomène pluvieux en tant qu'il concerne la totalité du bassin versant qui intéresse l'hydrologue et non quelques valeurs discrètes.
Il faut donc considérer la pluie comme un flux, dont on peut mesurer la valeur en certains points.



1.3. Difficultés propres au domaine étudié

Pourtant, au vu des mesures pratiquées jusqu'ici, le problème posé semble insoluble car il appert que le phénomène mesuré est essentiellement irrégulier, imprévisible irréductible à toute caractérisation simple, à savoir la traduction morphologique du phénomène en terme de fonctions analytiques réalisant certaines caractéristiques simples semble inadéquate.

Echec prévisible de toute tentative d'une approche conceptuelle ? Pourtant, une approche réductionniste faisant intervenir un modèle explicatif du phénomène en terme de physique des fluides et des gaz nécessite pour être opérationnel la connaissance d'un nombre énorme de paramètres et manipule des équations irrésolubles sans moyen considérable de calcul. Or, du point de vue de l'hydrologue, une telle perspective n'est pas acceptable, car elle oblitère de manière rédhibitoire toute qualité de simplicité et de transparence qui sont deux caractéristiques nécessaires des modèles qu'il propose à utilisation dans les services techniques des agglomérations et concentration urbaine.

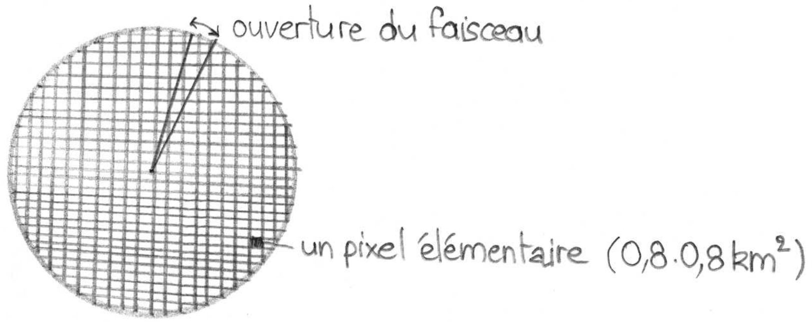
Alors, que faire ?

La première solution consiste à dire que si le phénomène au vu des mesures qui en sont faites est irrégulier intrinsèquement, c'est d'abord parce que le type de mesure considéré est impertinent, à savoir, une hauteur d'eau intégrée sur un pas de temps et ponctuellement, n'est pas la grandeur à considérer si l'on veut déterminer le phénomène -élucider un déterminisme auquel il obéit-.

Or, précisément,
Un autre type de mesure sur le phénomène s'est développé depuis quelques années à savoir la mesure radar. Celle-ci ne mesure pas directement une intensité de pluie mais une réflectivité à savoir la capacité qu'a un volume considéré de renvoyer l'échoradar -laquelle réflectivité dépend de la concentration, de la dimension des goutelettes d'eau contenues dans le volume-.

Le principe d'une telle mesure est, on le constate, très différent du précédent et par conséquent l'image qu'on retire du phénomène.

On obtient, en effet, une mesure presque ponctuelle dans le temps et intégrée sur l'espace.



Sur la portion d'espace balayée, la mesure donne une moyenne sur un carré de *0,8 km* x *0,8 km* pour une période de quelques secondes. L'image entière correspondant à une rotation du faisceau est donnée en environ une minute. On constate que le phénomène considéré de cette manière est relativement régulier. On peut, par exemple, sans dégradation irrémissible de l'information, mémoriser une image par cinq minutes et exhiber une évolution du phénomène faisant intervenir des déplacement de "cellules".

Ne peut-on alors se fonder uniquement sur l'interprétation radar du phénomène ? Abandonner les réseaux de pluviomètres ?

Il faudrait donc abandonner ces notions de hauteur d'eau ? Difficile car tout bien considéré, lorsqu'il pleut, on observe bien le déplacement d'un volume d'eau à l'exutoire du bassin, déplacement qu'il s'agit justement de quantifier.

Or, il est difficile de corréler par des relations simples la réflectivité radar et l'intensité précipitée au sol, trop de paramètres interviennent dont il n'est pas mesuré avec précision, l'importance relative.

Il faudra donc pour l'instant, à défaut de mieux, continuer à se servir des réseaux de pluviomètres mais en tenant compte de l'information radar.

Ainsi, une conclusion intéressante, semble émerger de ces expériences concernant "l'irrégularité intrinsèque dans le temps comme dans l'espace de la précipitation", à savoir que celle-ci semble liée à un facteur d'échelle à savoir que pour un intervalle de temps considéré, il existe une échelle spatiale correspondante telle que les irrégularités du phénomène puissent être négligées - irrégularité intrinsèque du phénomène qui semblerait analogue à celle que l'on peut percevoir dans les figures dites fractales-. Ceci, d'ailleurs, peut se constater simplement à partir des mesures déjà relevées sur les pluviomètres installés sur le territoire de la COURLY :

- si l'on considère la hauteur totale précipitée en un mois sur les différents pluviomètres la quantité mesurée varie très faiblement d'un pluviomètre à l'autre (sauf cas pathologique) ;

- si l'on considère les hauteurs journalières les variations journalières de hauteurs tombées les variations sont plus significatives.

Pour un pas de temps de l'ordre de six minutes, les différences d'un pluviomètre à l'autre sont considérables.

Ainsi,

si l'on considère la pluviométrie globalement sur la surface de la COURLY, le phénomène mesuré sur une échelle mensuelle révèle une homogénéité qui se dégrade au fur et à mesure que l'intervalle de temps considéré est plus petit.

1.4. Les deux approches

On supposera alors que dans l'intervalle d'échelle considéré

$6\ mn \leq \Delta T \leq 1\ mois$, $S = 60\ 000\ ha$

il suffit de définir un réseau de mesure suffisamment dense pour permettre une approximation analytique du phénomène pertinente, à savoir telle que les erreurs qu'elle induit en négligeant les irrégularités locales puissent être inférieures aux erreurs faites par les modèles hydrologiques considérés en aval.

Deux méthodes sont possibles :

- entamer une approche de type local ;
- entamer une approche de type global.

2. APPROCHE DE TYPE LOCAL

2.1. Principe

Celle-ci décompose la zone considérée en surfaces élémentaires *Si* pour laquelle l'intensité de précipitation varie de manière régulière et lentement. Dans la pratique, ceci se traduit en l'attribution pour chaque pluviomètre de zones d'influence sur lesquelles on considèrera que la mesure du pluviomètre est "représentative".

2.2. Critique

Pour être rigoureux, il faudrait être capable de décider quelle est pour un pluviomètre sa surface optimale de représentation, par exemple en expérimentant sur de très petites surfaces à réseau dense et en traitant les résultats au moyen de l'analyse statistique.

Sans doute, quelques expériences partielles ont-elles été menées mais jusqu'à présent aucune conclusion générale n'a pu être dégagée qui rendît intelligible la relation mise en cause.
Aussi, en sommes-nous réduits à définir arbitrairement des critères d'influence en fonction d'une distance mais la distance à considérer est-elle simplement la distance euclidienne sur le plan X, Y. Ne faudrait-il pas considérer la différence d'altitude ? Mais alors, quel critère de pondération définir ? (ΔZ de l'ordre de l'hectomètre alors que ΔX ou ΔY est de l'ordre du km). De telles questions restent en suspens ?

2.3. Conclusion

Le caractère essentiellement pratique de la méthode et sa simplicité de mise en oeuvre oblitère toute intelligibilité et rendent difficiles toutes corrections si sa cohérence interne (autocohérence) est mise en défaut.
Par exemple, supposons que deux zones contigües donnent des résultats en intensité très différents manifestement la méthode atteint ses limites, puisque l'on met en évidence ainsi une rupture de cohérence, pourtant il n'y a pas de possibilités de modifier la méthode pour que la mesure restant ce qu'elle est, la cohérence soit rétablie.

La méthode d'ailleurs fut essentiellement utilisée pour construire un "hyétogramme moyen", et non unelame d'eau. Malgré ses imperfections, sa large diffusion justifie que nous l'insérions dans le système et sans doute permettra-t-elle une comparaison avec la méthode globale dont nous allons exposer ci-dessous le principe.

3. APPROCHE GLOBALE

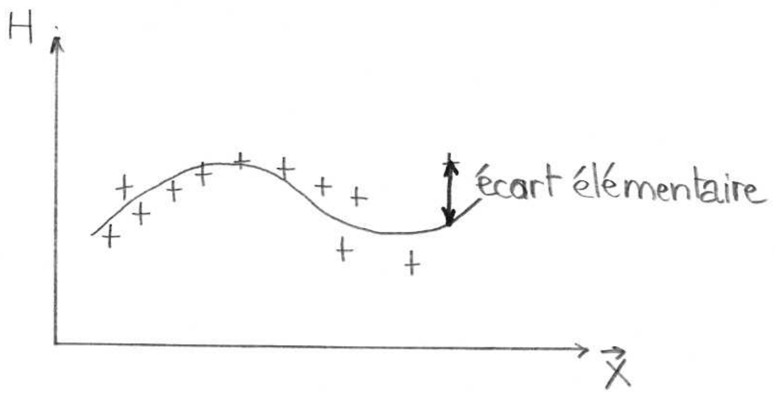
3.1. Présentation

L'approximation globale consiste à considérer le réseau de pluviomètres comme un tout indéhiscible, contrairement à la méthode précédente qui considère une somme de pluviomètres séparables (en leur zone d'influence).

Conceptuellement, une telle approche correspond mieux aux types d'expériences menées sur un réseau fixé d'une trentaine de pluviomètres pensé en fonction de la surface totale de la COURLY.

D'autre part, elle interdit une rupture de cohérence telle que celle signalée plus haut puisque la hauteur globale calculée en un point dépend de tous les pluviomètres(non-indépendance donc impossibilité de résultats très différents sur deux points relativement proches). Plus encore, cette méthode comme nous allons le voir permet une vérification de la cohérence tant interne qu'externe.

La technique utilisée est celle de l'approximation aux moindres carrés (nous en étudierons d'autres, mais ceci sort du cadre du texte présent).
Celle-ci consiste, pour un nuage de données fixé, à définir un sous-espace de fonctions analytiques dans lequel on minimisera la somme des carrés des écarts.



g(x) fonction approximation du nuage

3.2. Structuration de l'espace des données

Deux possibilités sont à considérer suivant que l'on opère ou non la dissociation de l'espace des variables d'entrée en variables espace et variables temps.

3.2.1. Dans le cas de la non-dissociation, un résultat de la méthode se présente sous la forme :

(1) $$F(\vec{X},t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \phi_i(\vec{X},t)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \phi_i(x,y,z,t)$$

$F(\vec{X},t)$ représente la valeur de la variable de sortie (intensité) pour un point de l'espace M tel que $\vec{OM} = \vec{X}$ et à l'instant t.

$\phi_i(x,y,z,t)$ est une fonction scalaire de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, différentiable (c'est une des fonctions de base choisies). α_i est une constante.

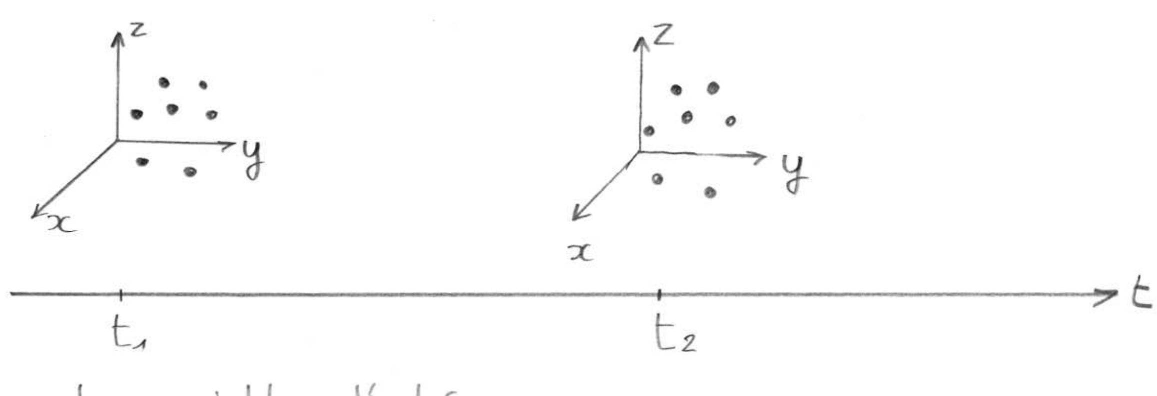
ex. de solution :

$$F(X,t) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 xyt + \alpha_3 xy + \alpha_4 t^4$$

Remarque : (1) représente l'équation d'une surface dans l'espace de dimension quatre.

3.2.2. Dans le cas de la dissociation, la variable temps est privilégiée. Il y a dissymétrie dans l'espace des variables d'entrée.

Schéma :



Espace des variables d'entrée.

Pour chaque pas de temps, l'approximation donne :

$$F_j(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} \, \phi_{ij}(\vec{X}) \qquad (j = 1,n)$$

F_j approximation au pas de temps $j\Delta T$.

ϕ_{ij} fonction scalaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, différentiable.

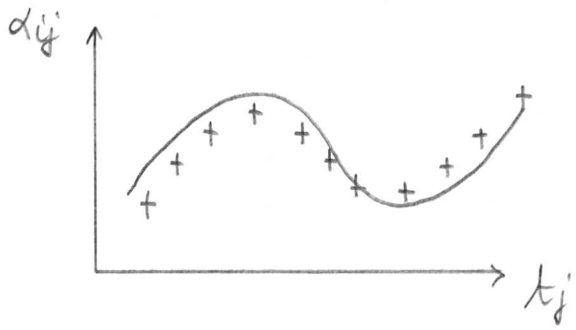
α_{ij} est une constante dépendant du pas de temps considéré

Généralement, les fonctions de base choisies ne dépendront pas du temps, donc :

$$F_j(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij}\phi_i(\vec{X}) \qquad (j = 1,n)$$

Le résultat est, pour chaque pas de temps, l'équation d'une surface dans l'espace de dimension trois.

On peut synthétiser le résultat en considérant que les α_{ij} trouvés aux différents pas de temps sont eux-mêmes l'approximation d'une certaine fonction $g_i(t)$.



Par une nouvelle application de la technique sur le nuage des coefficients α_{ij} on obtient $g_i(t)$.

Donc

$$F_j(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{p} g_i(t) \; \phi_i(\vec{X}) \qquad (j = 1,m)$$

$$F(\vec{X},t) = < \vec{g}(t) \; ; \; \phi(\vec{X}) >$$

avec

avec

$$\vec{g}(t) \quad \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_p(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{\phi}(X) \quad \begin{pmatrix} \phi_1(\vec{X}) \\ \phi_p(\vec{X}) \end{pmatrix}$$

$\vec{g}(t) \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ différentiable

$\vec{\phi}(\vec{X}) \quad : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^p$ différentiable

$< \; , \; >$ expression du produit scalaire dans $\mathbb{R}^P$

p, rappelons le, est le nombre de fonctions de base, choisi a priori pour déterminer la lame d'eau dans l'espace à un instant fixé.

Le produit scalaire est une généralisation de la multiplication dans l'espace $\mathbb{R}^p$.

On écrit aussi :

La dissociation nous paraît plus intéressante a priori pour deux raisons.

3.2.3. Comparaison entre dissociation / non dissociation

Ces techniques d'approximation ne sont intéressantes que si la fonction retenue comme meilleure approximation au sens du critère choisi, donne un écart petit. Or, pour obtenir un écart acceptable, il faut multiplier le nombre de fonctions de base et cela d'autant que le nombre de points du nuage considéré est plus important (à moins que, fort improbablement, l'organisation des données soit très simple).

Or, la non dissociation donne une approximation sur un nuage de

$n.p_1$ (n nombre de pas de temps considéré par la séquence)
(p_1 nombre de pluviomètres)

alors que

la dissociation permet de repérer n approximations sur un nuage de p_1 points.

Autrement dit, pour obtenir une bonne adéquation (fit) à l'observé, en économisant les fonctions, il est préférable d'opérer la dissociation.

La deuxième raison, fortement liée à la première, concerne l'intelligibilité de l'observé. A savoir, la dissociation en structurant le donné dissymétriquement par rapport au temps, permet de mettre en évidence l'évolution du phénomène et de vérifier ainsi la validité de certains concepts utilisés couramment en hydrologie (par exemple, notion de déplacement d'un épicentre).

3.3. Vérification de l'autocohérence

3.3.1. Problématique

En vertu du principe de la dissociation, nous travaillerons donc essentiellement sur les fonctions $F_j(\vec{X})$ définies au $j^{ième}$ pas de temps. Nous savons que les fonctions de base étant choisies, il suffit que leur nombre soit suffisamment grand pour que l'adéquation soit réalisée, à savoir que la somme des carrés des écarts entre les valeurs mesurées sur les pluviomètres et les valeurs calculées soit petite , ce que nous traduisons par :

$$E = \sum_{i=1}^{p_1} a_i \{ F_j(\vec{X}_i) - H_{mes\ i} \}^2 \qquad \text{acceptable}$$

i représente le $i^{ème}$ pluviomètre

$\vec{X}_i$ la, position dans l'espace du $i^{ème}$ pluviomètre

$F_j(\vec{X}_i)$ la hauteur calculée au $i^{ème}$ pluviomètre

$H_{mes\ i}$ la hauteur mesurée au $i^{ème}$ pluviomètre

a_i pondération éventuelle sur les points de mesures

Le problème, bien entendu, consiste à déterminer la base des fonctions optimales à savoir caractériser le type de fonctions à choisir (trigonométriques, polynomiales ...) et leur nombre minimal.

3.3.2. Méthodologie proposée

La méthodologie proposée s'articule en plusieurs étapes.

3.3.2.1. Notion d'écart cible

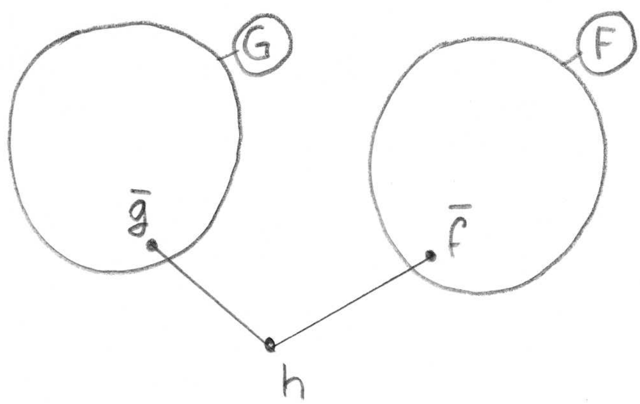
Dans un premier temps, on définit une suite de fonctions $\phi_{kj}(\vec{X})$ (j correspondant au pas de temps $j\Delta t$ que nous noterons par la suite $\phi_k(\vec{X})$ pour ne pas encombrer inutilement le texte.

$$F = \sum_{i=1}^{m} \phi_k (\vec{X})$$

Pour un m fixé, l'approximation donne un écart E_m. Dans un premier temps, on étudiera la variation suivant m de E_m et on déterminera la valeur M au-delà de laquelle l'écart est considéré comme négligeable (la valeur de l'écart cible E_b dépend, bien sûr, de la précision des mesures).

Mais telle vérification, on le voit, est insuffisante pour départager les meilleures approximations choisies dans des espaces de fonctions différents.

Schéma :



h symbolise l'élément à approximer.

G et F sont deux espaces de fonctions différents tels que la meilleure approximation de h soit respectivement $\bar{g}$ et $\bar{f}$.

Si la distance (écart) de g à h $d(\bar{g},h)$ est équivalente à $d(\bar{f},h)$, comment choisir entre $\bar{g}$ et $\bar{f}$?

3.3.2.2. Caractérisation supplémentaire

Un nouveau critère est proposé qui caractérise les solutions en faisant intervenir une notion de stabilité de l'approximation vis-à-vis d'une dégradation de l'information.

L'idée est simple :

Supposons que la fonction $\vec{\phi}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i(\vec{X})$ définie à partir du nuage $\vec{X}_k, H_k$

$\vec{X}_k$ position du $k^{ième}$ pluviomètre

H_k intensité du $k^{ième}$ pluviomètre

corresponde "réellement" à une forme du phénomène. Dans ce cas, si nous supprimons une partie de l'information (par exemple la mesure sur un pluviomètre) et que nous réitérions la recherche de la fonction d'approximation dans le même espace que précédemment (mêmes fonctions de base ϕ_i), nous observerons nécessairement la condition de stabilité interne et externe de la solution.

- La condition de stabilité externe s'énonce : l'information oblitérée peut être reconstituée. Par exemple, l'approximation sur le nuage dégradé (un pluviomètre en moins) doit permettre de calculer au droit du pluviomètre manquant, une valeur d'intensité proche de la valeur mesurée.

- La condition de stabilité interne s'énonce : la distance entre la fonction $\vec{\phi}_1$ approximation du nuage initial et la fonction $\vec{\phi}_2$ approximation du nuage dégradé doit être faible $d(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2)$ petite, ce qui s'énonce autrement les α_i varient peu lorsque l'information se dégrade.

- De notre point de vue, c'est la condition de stabilité interne qui est le critère prépondérant, car il permet effectivement de mesurer l'autocohérence de la méthode. L'autre condition est une condition non d'autocohérence, mais d'exocohérence (cohérence externe).

Or, étant donné la nature du phénomène, il est fort possible qu'au pas de temps considéré, la valeur mesurée au droit du pluviomètre ne soit pas représentative et donc l'écart entre valeur mesurée et valeur calculée insignificatif, quand bien même on pourrait considérer que dans l'ensemble, les valeurs mesurées sont significatives.

Mais alors, doit-on renoncer à toute référence à une réalité du phénomène hors de la méthode utilisée pour le représenter ? C'est ici qu'intervient à nouveau la mesure radar du phénomène qui permettra, à notre avis, de mesurer cette exocohérence de manière plus significative que précédemment.

3.4. Vérification de l'exocohérence

L'image radar permet, ainsi que nous l'avons remarqué précédemment, de mettre en évidence des déplacements de cellules correspondant à des zones de forte réflectivité. L'idée avancée consiste à déterminer, à partir des surfaces d'approximation définies à chaque pas de temps, des courbes d'isointensités ou plus simplement des zones où l'intensité dépasse un certain seuil et ensuite, à mettre en évidence leur déplacement et leur déformation que l'on comparera à l'image radar.

Dans le cas où la correspondance serait avérée, on définirait des trajectoires du phénomène et des déplacements sur des bases plus solides et plus précises. En effet, aujourd'hui dans la plupart des cas, ces deux paramètres sont reliés à un point que l'on nomme épicentre de l'averse (point de la surface sur lequel l'intensité précipitée est maximale) concept pour le moins remis en question au vu des images que le radar nous procure.

4. CONCLUSION GENERALE

L'approche considérée du phénomène pluie, qui non seulement met en oeuvre des techniques d'approximation mais tente aussi de réfléchir sur les hypothèses induites et les critères possibles de mesure de validité de la solution proposée, permettront, nous l'espérons, d'esquisser progressivement une intelligibilité du phénomène et ses limites.

D'autres techniques d'approximation pourront être considérées (et le sont déjà) en définissant sur les mêmes espaces de fonctions ou sur d'autres des métriques différentes qui s'adapteraient mieux au phénomène. Cette réflexion ne sort toutefois pas du cadre général méthologique défini présentement et elle est actuellement poursuivie.